

# 切り紙に潜む物理

磯部 翠 (お茶の水女子大学)

奥村 剛 (お茶の水女子大学 okumura@phys.ocha.ac.jp)

日本人にとってなじみ深い折り紙は、近年は科学界でも“Origami”と呼ばれ、広い分野で注目されている。特に人工衛星の太陽光電池パネルに利用されたミウラ折<sup>1)</sup>でよく知られている。このように、シート材料を折りたたむことで小さくまとめることや立体造形をも可能にするとして、Origamiは今や重要な工学的応用のアプローチのひとつとなり、物理分野でも盛んに研究がされてきている。<sup>2,3)</sup> また、大ヒットした映画『シン・ゴジラ』では、ゴジラの謎を解くカギが折り紙に秘められているという展開で、折り紙研究の一端が多くの人々の目に触れることとなった。<sup>4)</sup>

そのような中、ごく最近“Kirigami”というアイデアが知られるようになってきた。語源はOrigamiと同様に日本語の「切り紙」だというのが、日本人のイメージする切り紙細工とはいささか異なった発展をしているようだ。様々なタイプのKirigamiが提案されているが、我々は特に、シートに多数の平行で規則的な切れ込みを入れたものに着目し、切り紙構造と呼ぶ。<sup>5)</sup>

## 1. 切り紙構造

図1に、我々が見つけた身近な切り紙構造を挙げてみた。(a)は多くの人々が目にしたことがあるだろう。ワインを買うとよくつけてもらえる緩衝材である。切り紙構造によって紙がネット状になり、よく伸縮するという性質を利用して、ボトルを包み込んでいる。外国ではあまり見かけないと聞くので、やはり日本発祥の構造なのかもしれない。(b)はインテリア商品で、円形の紙に同心円状の切れ込みを入れたものを変形させたものである。紙を立体的に変形させて様々な形の壺状にできるのが楽しい。ミュージアムショップや雑貨屋などで買うことができる。その他には七夕飾りにも、切り紙構造を利用したものがある。

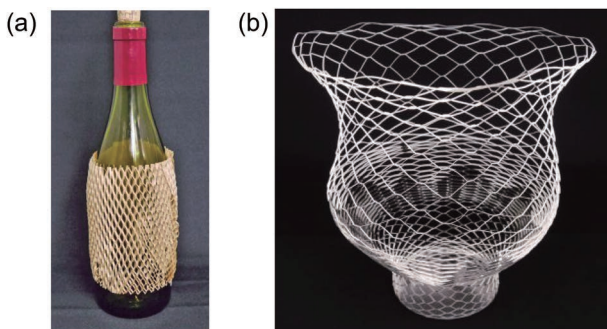


図1 (a) ワインボトルの緩衝材, (b)「空気の器」(トラフ建築設計事務所).

このように、切り紙構造は簡単な加工によってシート材料を大きく変形させることを可能にする。これを利用して、グラフェンシート,<sup>6)</sup> リチウムイオンバッテリー,<sup>7)</sup> 太陽光電池パネル<sup>8)</sup> など、様々なシート材料の応用の可能性が大きく広がることを期待した研究が行われている。

一方で、より基礎的な、この構造自体の物理的特性はまだよくわかっていない。本稿では、その力学的振る舞いについて調べてみよう。<sup>9)</sup>

## 2. 実験方法

まずは試料となる切り紙構造を作る。紙に市販のカッティングプロッタを用いて切れ込みを入れ、簡単に切り紙構造を作ることができる。それを引き伸ばした様子が図2(a)である。元の紙と比べて大きく変形しているのは想像通りだが、変形にはムラがあり、均一に孔が開くわけではないことがわかる。

なるべく均一な変形を観察したいので、今回は図2(b)のように、縦一列に10本の切れ込みの入った試料を用いることにした。上下の端は拘束されており中央付近とは変形の様子が異なる。この端の効果を減らすため、縦は十分長くとることにした。

切り紙構造を特徴づける変数は、切れ込み長さ $w$  (~10 mm)、切れ込み間隔 $d$  (~1 mm)、紙の厚さ $h$  (~0.1 mm)がある。簡単のため、今回は縦・横方向の切れ込み間隔を等しくとる。

$w, d$ はカッティングプロッタの設定で簡単に変わることができるが、 $h$ に関しては自分で変えることはできない。そこで、素材として4種類の厚さのものが市販されているケント紙を選んだ。ケント紙は湿度と温度を適切に管理すれば弾性率がほぼ一定とみなせる点も利点である。

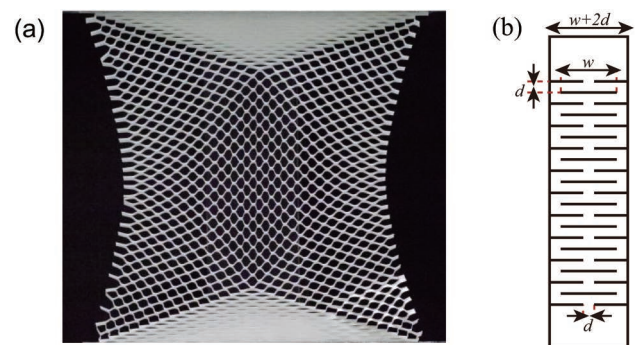


図2 (a) 切り紙構造の紙を引き伸ばしている様子, (b) 簡単化した試料.

測定装置として、フォースゲージとスライダーによって簡単な引っ張り試験機を組んだ。試料の上下の辺をそれぞれ治具で留めて下辺は装置に固定し、上辺はフォースゲージから吊り下げる。フォースゲージはスライダーに取り付けてあるので、等速で変位を与えながら、試料にかかっている力を測定できるようになっている。

### 3. 実験結果—力学応答と転移現象—

一回の実験について、伸ばしはじめてから破断するまでの測定結果をグラフにしたものが図3である。塑性材料の場合によく見られる、非線形的な振る舞いをするのがわかる。

この振る舞いの全般的特徴をみると、(1)初期の硬い線形弾性領域(初期領域)、(2)プラトー領域(第2領域)、(3)破壊直前の領域(第3領域)の3つの領域に分けられる。各点での試料の様子を写真で示した。

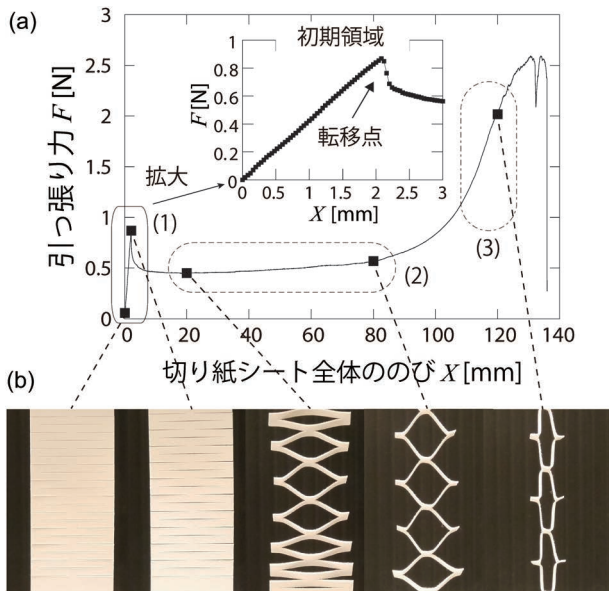


図3 (a) 伸ばしはじめから切れるまでの力学応答, (b) 試料の様子。

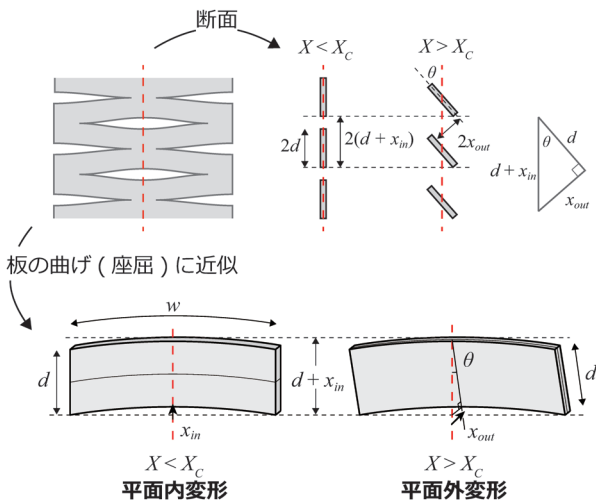


図4 転移の模式図。(上)断面を見たときの転移,(下)単位要素を見たときの転移( $w \gg d$ )。

話題 切り紙に潜む物理

(1)初期領域と(2)第2領域の境となる極大点があるので、転移点と呼ぶことにする。グラフでは明らかな変化が見て取れるが、正面から見ると、変位も小さく、転移によって何が変化しているのかはよくわからない。しかし、この変化は横からみるとよくわかる。ぜひ実際にワインを買って前述の切り紙を入手するか、適当な紙にカッターで切れ込みを入れるかして観察してみしてほしい。

切り紙を引き伸ばして横から見ると、ただの紙を引っ張ったときと違い、元の紙面の厚み方向にも変形しはじめる。引っ張りをはじめたときには、横から見てもただの紙と同じように平たく見えていたものが、ある時点で立体的な変形をするようになるのだ。この平面内から平面外変形への移行が、転移にあたる(図4)。

逆に言えば、平面的な状態ではシートは硬く、十分に大きく変形させることはできない。転移して立体的な変形をすることによって初めて、切り紙構造特有の大きな変形が可能になっているのだ。つまり、切り紙の伸張性のカギとなっているのが、この転移現象であるといえる。

### 4. 実験結果—スケーリング則—

以降では、初期領域と転移を特徴づける2つの量 $K_1$ ,  $X_c$ に着目しよう。

初期領域では、力 $F$ とのび $X$ の関係は線形である。このことから、この領域での振る舞いを $F=K_1X$ と書くことができる。つまり、 $K_1$ は初期領域の弾性ばね定数にあたり、切り紙の硬さを表す。パラメータを変えたときの $K_1$ の実

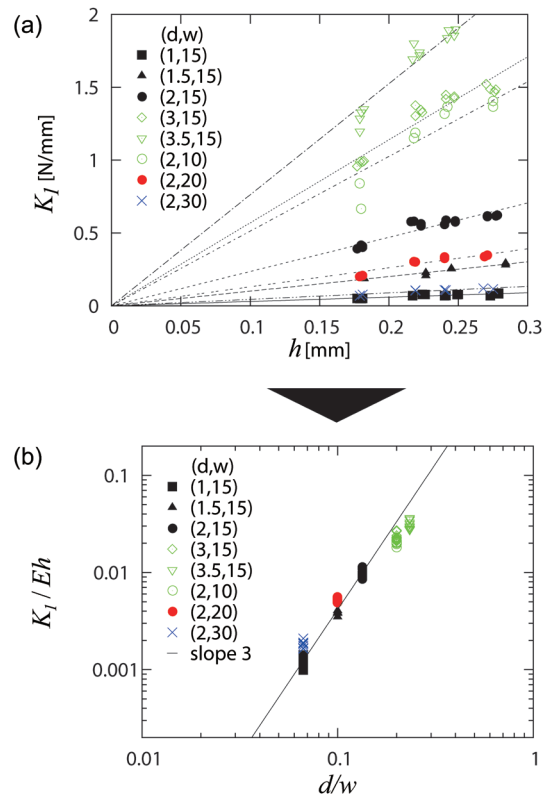


図5 初期の弾性率 $K_1$ の実験結果。(a)生データ,(b)導いたスケーリング則に基づいて無次元化したもの。文献9をもとに作製。

験値を図5(a)に示した。切り紙のパラメータ  $w, d$  がわずかに数ミリ違うだけで、同じシートを用いても弾性が10倍以上変わっているということがわかる。

実験結果と後述の理論的考察により導かれたスケーリング則は次式である。

$$K_1 \sim E \frac{d^3 h}{w^3} \quad (1)$$

$E$  は、切れ込みを入れない状態でシート材料がもつヤング率である。切れ込み長  $w$  が大きくなると柔らかくなるなど、直感に反しない結果である。この式に基づいて規格化し全データを整理したものが図5(b)である。別の言い方をすれば、データが式(1)に従っていれば、図の点線と同じ傾きをもつ一直線上に収斂するようにグラフを書き直したものである。したがって、データが点線によく並んだこの図から、初期の弾性率がこのスケーリング則でかなり良く説明できることがわかる。

この結果は、切り紙加工によって弾性率を定量的に制御できることを意味する。例えば、この式を指導原理とすることで、決まったヤング率・厚さでしか製造できない特殊なシート材料に切り紙加工を施し、材料の使用場面に合わせた弾性率へと加工することができる。

$X_c$  は、転移するときのびである。つまり転移条件は  $X = X_c$  で与えられる。実験結果は図6(a)に示した。この図の補助線は、グラフを見やすくするために  $X_c = \beta h^2$  ( $\beta$  は定数) に相当する直線を引いたものである。導かれたスケーリング則は次式であり、この式も図6(b)に示す通り、実

験結果とよく整合する。

$$X_c \sim \frac{h^2}{d} \quad (2)$$

この式によれば、転移条件は切れ込み長には依存せず、紙の厚さに強い依存性をもつ。厚ければ厚いほど転移しづらく、初期領域が長く続く。

式(2)を利用することで、切り紙シートの転移点における伸長の大きさを自在にコントロールできる。切り紙構造の硬い初期領域を利用したければ、 $d$  を小さく、 $h$  を大きくすれば良い。 $d$  を小さくすることで、転移しにくい切り紙を作ることもできる。

## 5. スケーリング則の導出

式(1), (2)を理論的に導出してみよう。切り紙の変形をよく見てみると、単純に曲げられた板がたくさん連なっているとみなせることがわかる。この板1枚を単位要素と呼ぶことにする。単位要素2枚で1つの孔を形作っていることになるので、孔の数を  $N$  とすると、単位要素の数は  $2N$  となる。

これらの単位要素は左右端と中点に、上下方向の力がかかって曲げられている。 $w \gg d$  という条件を付ければ、図4の下図に示したような板の曲げ変形(座屈)とみなすことができそうだ。そこで、この仮定の下で単位要素の曲げのエネルギーを計算してみることにする。

### 5.1 初期の弾性ばね定数 $K_1$

一般的に、辺の長さ  $a, b$  の矩形断面をもつ長さ  $L$  の板を、長さ  $a$  の辺に平行な方向に変位  $x$  だけ曲げたとき、弾性エネルギーは次式のようになることが知られている。<sup>9)</sup>

$$U \sim E \frac{a^3 b}{L^3} x^2 \quad (3)$$

切り紙の単位要素が長さ  $w$  の板だと考え、このエネルギーに当てはめる。初期領域の平面内変形では、図4を見ると、曲げの変位に平行な辺、垂直な辺がそれぞれ長さ  $d, h$  の辺にあたる。すると、エネルギーは

$$U_{in} \sim E \frac{d^3 h}{w^3} x_{in}^2 \quad (4)$$

となる。一片あたりの曲げの変位  $x_{in}$  は、全体の変位  $X$  とは  $x_{in} = X/2N$  という関係にある。

エネルギー  $U_{in}$  を  $x_{in}$  で微分して変位方向にかかっている力を導くと、

$$F \sim E \frac{d^3 h}{w^3} x_{in} \quad (5)$$

となる。この式を線形ばねの変位と力の関係  $F = K_1 X$  の形と比較すると式(1)が導出される。

なお、図5(b)において緑色のマーカーで示した点はある意味での整合性を示す。なぜなら、これらのデータは条件  $w \gg d$  という条件を十分にはよく満たしていないデータであるため、他のデータが並ぶ直線からわずかに外れていると考えられるからだ。

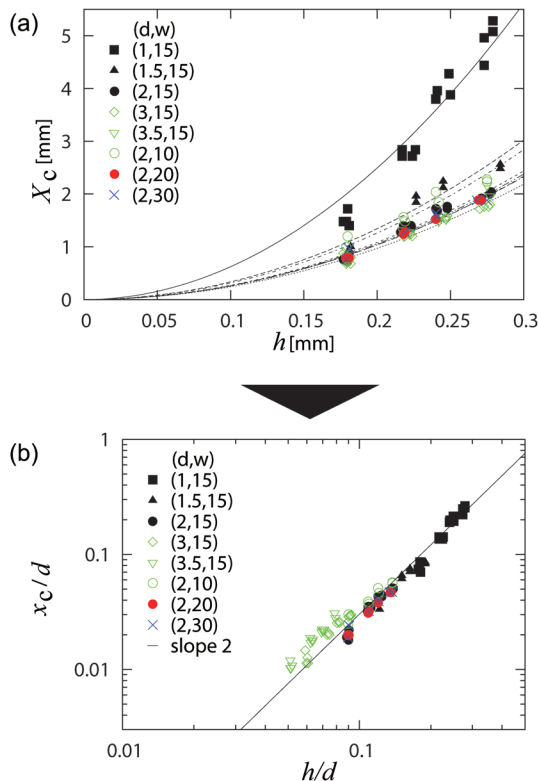


図6 初期の弾性率  $X_c$  の実験結果。(a) 生データ。(b) 導いたスケーリング則に基づいて無次元化したもの ( $X_c = 2Nx_c$ )。文献9をもとに作製。

## 5.2 転移条件 $X_c$

同様にエネルギーを計算して式(2)を導く。切り紙に変位  $X$  が与えられたとき、変形には平面内変形と平面外変形の2通りがあり得る。したがって、それぞれのエネルギー  $U_{in}$ ,  $U_{out}$  を比較すると、 $X < X_c$  の間は  $U_{in} < U_{out}$ ,  $X > X_c$  となると平面外変形に転移して  $U_{in} > U_{out}$  となるはずだ。

そこで、 $U_{out}$  を計算し、 $U_{in}$  と  $U_{out}$  を比較して  $X_c$  を求める。転移の瞬間、平面的変形から平面外変形に移行すると、単位要素の変位の方向も変わることになる。この単位要素の変位は図4にある  $x_{out}$  に対応する。これから切り紙を正面から見たのび方向の変位  $x_{in}$  を求める。横から見た図4から幾何学的に考えると、 $x_{out} = (x_{in}^2 + 2x_{in}d)^{1/2}$  が得られる。今回は  $U_{in}$  を求めたいときと異なり、変位と平行な辺が長さ  $h$  の辺になるので、エネルギーは次式となる。

$$U_{out} \sim E \frac{h^3 d}{w^3} x_{out}^2 \sim E \frac{h^3 d}{w^3} x_{in} d \quad (6)$$

ここで、 $d \gg x_{in}$  として  $x_{in}d$  に対し  $x_{in}$  の二次の項は無視した。こうして求めた式(6)を、転移点において平面的変形と平面外変形のエネルギーがつり合うと考え、式(4)とバランスすると、式(2)が導かれる。

## 6. さいごに

今回は簡単な切り紙の試料を作って引っ張り実験を行い、力学応答を調べた。その結果、切り紙の伸張性の起源が平面内変形から平面外変形への転移現象にあることを実験と理論の一致から示し、初期の弾性率と転移の条件についてスケーリング則を導くことができた。これらの結果は、すでに述べたようにシート材料の弾性を定量的に制御するための指導原理としても利用できる。<sup>10)</sup>

切り紙は簡単な加工によるシンプルな構造であるが、その振る舞いには興味深い点が多々残っている。例

えば、第2領域と第3領域のクロスオーバーや破壊限界の定量化は実用的にも重要な課題である。

また、図3に示した力学応答の概形は、樹脂や金属などに見られる塑性変形の典型的なSSカーブと類似している。切り紙の物理と材料物性の理論との類似性に着目する展開もあるだろう。

切り紙の切れ込みの幾何学形状と立体的変形の関係についても、定量的にはまだ何もわかっていない。例えば図1(b)では、切れ込みを同心円状に入れた場合は、花瓶のような立体が得られることを示した。このように、切れ込みの形状やパターンの入れ方と、様々な立体形状の間の関係が定量的にわかれば、切り紙を使ったデザインに役立つだろう。

冒頭に述べたように、今回着目したような切り紙構造以外にも、パターンや大きさに関わらず切れ込み・穴をあけたシートが広く Kirigami と呼ばれ、研究されている。<sup>11)</sup> Kirigami が研究されるようになってからまだ日が浅いが、近い将来、Kirigami も Origami に並ぶバリエーションをもち、幅広く研究・利用されるようになるのかもしれない。

## 参考文献

- 1) 三浦公亮：地図35 (1997) 1.
- 2) L. Mahadevan, *et al.*: *Science* **307** (2005) 1740.
- 3) C. Py, *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 156103.
- 4) 中島林彦：日経サイエンス (2016) 12月号—折り紙で解くシン・ゴジラ。
- 5) T. C. Shyu, *et al.*: *Nature Mater.* **14** (2015) 785.
- 6) M. K. Bles, *et al.*: *Nature* **524** (2015) 204.
- 7) Z. Song, *et al.*: *Sci. Rep.* **5** (2015) 10988.
- 8) A. Lamoureux, *et al.*: *Nat. Commun.* **6** (2015) 8092.
- 9) M. Isobe and K. Okumura: *Sci. Rep.* **6** (2016) 24758.
- 10) 磯部 翠, 武居 淳, 奥村 剛：「切り紙構造のシート材, これを用いた細胞シートとフォースセンサー, 及びシート材の弾性調整方法」特願2016-082472.
- 11) D. M. Sussman, *et al.*: *Proc. Natl. Acad. Sci.* **112** (2015) 7449.

(2016年12月20日原稿受付)